Circulación General de la Atmósfera

2.$^{\text{do}}$ Cuatrimestre 2009

Energética del modelo de aguas poco profundas

1. Ecuaciones del modelo y definición de las energías

Las ecuaciones del modelo, en el caso en que el forzante es aplicado a la superficie libre del fluido, pueden escribirse como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\kappa_v u \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\kappa_v v \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial\left[(H+\eta)\,u\right]}{\partial x} + \frac{\partial\left[(H+\eta)\,v\right]}{\partial y} = -\kappa\left(\eta - \eta_{fr}\right) \tag{3}$$

Como en este sistema η representa una anomalía respecto de la altura de reposo del fluido (H), se asume que $\eta \ll H$ y la *ecuación 3* se simplifica como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = -\kappa\left(\eta - \eta_{fr}\right) \tag{4}$$

Bajo la simplificación anterior, la *energía cinética* del fluido por unidad de area será:

$$K = \frac{\rho H}{2}(u^2 + v^2) \tag{5}$$

La *energía potencial* por unidad de area estará dada por:

$$A = \int_{-H}^{\eta} \rho\phi dz = \int_{-H}^{\eta} \rho g z dz = \frac{\rho g}{2}(\eta^2 + H^2) \tag{6}$$

2. Derivación de las ecuaciones de energía para el flujo medio y las perturbaciones

Antes de derivar las ecuaciones de energía es necesario aclarar que en este caso el *flujo medio* estará representado por el promedio zonal de las variables y se usará el subíndice z para identificarlo. Por otro lado, las *perturbaciones* estarán representadas por las anomalías respecto del flujo medio zonal y estarán indicadas por el subíndice e. En los desarrollos matemáticos, el promedio zonal se representará mediante el operador $\langle\rangle$.

2.1. Energía cinética

Para obtener las ecuaciones para la energía cinética del flujo medio y las perturbaciones se parte de las ecuaciones de momento ((1) y (2)). En ellas se realizan los siguientes reemplazos:

$$
\begin{aligned}
u &= u_z + u_e && (7)\\
v &= v_z + v_e && (8)\\
\eta &= \eta_z + \eta_e && (9)
\end{aligned}
$$

Se obtiene en la ecuación de evolución de u:

$$
\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_e\frac{\partial u_e}{\partial x} + v_z\frac{\partial u_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial u_e}{\partial y} + v_e\frac{\partial u_z}{\partial y} + v_e\frac{\partial u_e}{\partial y} - fv_z - fv_e + \\
+g\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + g\frac{\partial \eta_e}{\partial x} = -\kappa_v u_z - \kappa_v u_e \quad (10)
$$

y análogamente, en la ecuación de evolución de v:

$$
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_e}{\partial t} + u_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + u_z\frac{\partial v_e}{\partial x} + u_e\frac{\partial v_z}{\partial x} + u_e\frac{\partial v_e}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_e}{\partial y} + v_e\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_e\frac{\partial v_e}{\partial y} + fu_z + fu_e + \\
+g\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + g\frac{\partial \eta_e}{\partial y} = -\kappa_v v_z - \kappa_v v_e \quad (11)
$$

Promediando zonalmente las *ecuaciones* 10 *y* 11, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x} + \left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle + v_z\frac{\partial u_z}{\partial y} + \left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle - fv_z + g\frac{\partial \eta_z}{\partial x} &= -\kappa_v u_z && (12)\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + u_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + \left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle + v_z\frac{\partial v_z}{\partial y} + \left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle + fu_z + g\frac{\partial \eta_z}{\partial y} &= -\kappa_v v_z && (13)
\end{aligned}
$$

Para obtener la ecuación de la energía cinética del flujo medio, se debe multiplicar a las *ecuaciones* 12 *y* 13 por u_z y v_z, respectivamente. Se obtiene:

$$
\begin{aligned}
u_z\frac{\partial u_z}{\partial t} + {u_z}^2\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z\left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle + u_z v_z\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle - fu_z v_z + gu_z\frac{\partial \eta_z}{\partial x} &= -\kappa_v {u_z}^2 && (14)\\
v_z\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z u_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle + {v_z}^2\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle + fu_z v_z + gv_z\frac{\partial \eta_z}{\partial y} &= -\kappa_v {v_z}^2 && (15)
\end{aligned}
$$

Sumando las *ecuaciones* 14 *y* 15 se obtiene:

$$
\frac{\partial[({u_z}^2 + {v_z}^2)/2]}{\partial t} + u_z\frac{\partial[({u_z}^2 + {v_z}^2)/2]}{\partial x} + v_z\frac{\partial[({u_z}^2 + {v_z}^2)/2]}{\partial y} + gu_z\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + gv_z\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + \\
+u_z\left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle + u_z\left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle + v_z\left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle + v_z\left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle = -\kappa_v v_z - \kappa_v v_e \quad (16)
$$

En la *ecuación* 16, los 4 términos previos al signo igual pueden escribirse en notación de Einstein como: $u_{zi}\left\langle u_{ej}\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_j}\right\rangle$ $(i,j=1,2)$. Este término puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$u_{zi}\left\langle u_{ej}\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_j}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial(u_{zi}u_{ei}u_{ej})}{\partial x_j}\right\rangle - u_{zi}\left\langle u_{ei}\frac{\partial u_{ej}}{\partial x_j}\right\rangle - \frac{\partial u_{zi}}{\partial x_j}\left\langle u_{ei}u_{ej}\right\rangle \tag{17}$$

Usando la *ecuación* 17, la *ecuación* 16 puede escribirse en notación de Einstein como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial[{u_{zi}}^2/2]}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial[{u_{zi}}^2/2]}{\partial x_i} + \left\langle\frac{\partial(u_{zi}u_{ei}u_{ej})}{\partial x_j}\right\rangle - u_{zi}\left\langle u_{ei}\frac{\partial u_{ej}}{\partial x_j}\right\rangle - \frac{\partial u_{zi}}{\partial x_j}\left\langle u_{ei}u_{ej}\right\rangle + \\ + g u_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} = -\kappa_v {u_{zi}}^2\end{aligned} \tag{18}$$

Para calcular la ecuación de la energía cinética de las perturbaciones se debe retener a partir de las *ecuaciones* 10 *y* 11 la parte puramente perturbada. Para ello, se debe calcular $(10)-(12)$ y $(11)-(13)$. Se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_z\frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_e\frac{\partial u_e}{\partial x} + v_z\frac{\partial u_e}{\partial y} + v_e\frac{\partial u_z}{\partial y} + v_e\frac{\partial u_e}{\partial y} - f v_e + g\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + \\ - \left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle - \left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle &= -\kappa_v u_e \quad (19) \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} + u_z\frac{\partial v_e}{\partial x} + u_e\frac{\partial v_z}{\partial x} + u_e\frac{\partial v_e}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_e}{\partial y} + v_e\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_e\frac{\partial v_e}{\partial y} + f u_e + g\frac{\partial \eta_e}{\partial y} + \\ - \left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle - \left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle &= -\kappa_v v_e \quad (20)\end{aligned}$$

A continuación se debe multiplicar a las *ecuaciones* 19 *y* 20 por u_e y v_e, respectivamente. Se obtiene:

$$\begin{aligned}u_e\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e u_z\frac{\partial u_e}{\partial x} + {u_e}^2\frac{\partial u_z}{\partial x} + {u_e}^2\frac{\partial u_e}{\partial x} + u_e v_z\frac{\partial u_e}{\partial y} + u_e v_e\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_e v_e\frac{\partial u_e}{\partial y} - f u_e v_e + g u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + \\ - u_e\left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle - u_e\left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle = -\kappa_v {u_e}^2\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}v_e\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e u_z\frac{\partial v_e}{\partial x} + v_e u_e\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_e u_e\frac{\partial v_e}{\partial x} + v_e v_z\frac{\partial v_e}{\partial y} + {v_e}^2\frac{\partial v_z}{\partial y} + {v_e}^2\frac{\partial v_e}{\partial y} + f u_e v_e + g v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y} + \\ - v_e\left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle - v_e\left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle = -\kappa_v {v_e}^2\end{aligned} \tag{22}$$

Sumando las *ecuaciones* 21 *y* 22 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial[({u_e}^2+{v_e}^2)/2]}{\partial t} &+ u_z\frac{\partial[({u_e}^2+{v_e}^2)/2]}{\partial x} + v_z\frac{\partial[({u_e}^2+{v_e}^2)/2]}{\partial y} + u_e\frac{\partial[({u_e}^2+{v_e}^2)/2]}{\partial x} + v_e\frac{\partial[({u_e}^2+{v_e}^2)/2]}{\partial y} + \\ &+ {u_e}^2\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_e v_e\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_e v_e\frac{\partial v_z}{\partial x} + {v_e}^2\frac{\partial v_z}{\partial y} + g u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + g v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y} + \\ &- u_e\left\langle u_e\frac{\partial u_e}{\partial x}\right\rangle - u_e\left\langle v_e\frac{\partial u_e}{\partial y}\right\rangle - v_e\left\langle u_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right\rangle - v_e\left\langle v_e\frac{\partial v_e}{\partial y}\right\rangle = -\kappa_v({u_e}^2+{v_e}^2)\end{aligned} \tag{23}$$

Que puede ser escrita en notación de Einstein como:

$$\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial x_i} + u_{ei}\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial x_i} + u_{ei}u_{ej}\frac{\partial u_{zi}}{\partial xj} + gu_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial xi} - u_{ei}\left\langle u_e j\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_j}\right\rangle = -\kappa_v {u_{ei}}^2 \quad (24)$$

y al promediarla zonalmente se obtiene:

$$\left\langle\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial t}\right\rangle + u_{zi}\left\langle\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial x_i}\right\rangle + \left\langle u_{ei}\frac{\partial[{u_{ei}}^2/2]}{\partial x_i}\right\rangle + \langle u_{ei}u_{ej}\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial xj} + g\left\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial xi}\right\rangle = -\kappa_v\left\langle {u_{ei}}^2\right\rangle \quad (25)$$

Multiplicando las *ecuaciones* 18 *y* 25 por ρH se obtiene:

Energía cinética del flujo medio:

$$\frac{\partial K_z}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial K_z}{\partial x_i} + \rho H\left\langle\frac{\partial(u_{zi}u_{ei}u_{ej})}{\partial x_j}\right\rangle - \rho H u_{zi}\left\langle u_{ei}\frac{\partial u_{ej}}{\partial x_j}\right\rangle - \rho H\langle u_{ei}u_{ej}\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_j} + \rho g H u_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} = -\rho H\kappa_v {u_{zi}}^2 \quad (26)$$

Energía cinética media de las perturbaciones:

$$\left\langle\frac{\partial K_e}{\partial t}\right\rangle + u_{zi}\left\langle\frac{\partial K_e}{\partial x_i}\right\rangle + \left\langle u_{ei}\frac{\partial K_e}{\partial x_i}\right\rangle + \rho H\langle u_{ei}u_{ej}\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial xj} + \rho g H\left\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial xi}\right\rangle = -\rho H\kappa_v\left\langle {u_{ei}}^2\right\rangle \quad (27)$$

2.2. Energía potencial

Para obtener las ecuaciones para la energía potencial del flujo medio y las perturbaciones se parte de la ecuación de evolución de η (3). En ella se realizan los siguientes reemplazos:

$$u = u_z + u_e \quad (28)$$

$$v = v_z + v_e \quad (29)$$

$$\eta = \eta_z + \eta_e \quad (30)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_z}{\partial t} + \frac{\partial \eta_e}{\partial t} + H(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + H(\frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y}) + \eta_z(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + \eta_z(\frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y}) + \\ +\eta_e(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + \eta_e(\frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial v_e}{\partial y}) + u_z\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + u_z\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + u_e\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + \\ +u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + v_z\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial \eta_e}{\partial y} + v_e\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y} = -\kappa\left(\eta_z + \eta_e - \eta_{fr}\right)\end{aligned} \quad (31)$$

Promediando zonalmente la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \eta_z}{\partial t} + H\frac{\partial u_z}{\partial x} + H\frac{\partial v_z}{\partial y} + \eta_z(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + \left\langle \eta_e\frac{\partial u_e}{\partial x} + \eta_e\frac{\partial v_e}{\partial y} \right\rangle + u_z\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + \\ + \left\langle u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y} \right\rangle = -\kappa\left(\eta_z - \langle \eta_{fr} \rangle\right) \tag{32}$$

y luego se multiplica el resultado por η_z, obteniendose:

$$\eta_z\frac{\partial \eta_z}{\partial t} + H\eta_z\frac{\partial u_z}{\partial x} + H\eta_z\frac{\partial v_z}{\partial y} + {\eta_z}^2(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + \eta_z\left\langle \eta_e\frac{\partial u_e}{\partial x} + \eta_e\frac{\partial v_e}{\partial y} \right\rangle + \eta_z u_z\frac{\partial \eta_z}{\partial x} + \eta_z v_z\frac{\partial \eta_z}{\partial y} + \\ + \eta_z\left\langle u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x} + v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y} \right\rangle = -\kappa\left({\eta_z}^2 - \eta_z\langle \eta_{fr} \rangle\right)$$

(33)

reordenando los términos:

$$\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial t} + u_z\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial x} + v_z\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial y} + \eta_z\left\langle \frac{\partial(u_e\eta_e)}{\partial x} + \frac{\partial v_e\eta_e}{\partial y} \right\rangle + H\eta_z(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) + \\ + {\eta_z}^2(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y}) = -\kappa\left({\eta_z}^2 - \eta_z\langle \eta_{fr} \rangle\right) \tag{34}$$

Escrita en notación de Einstein resulta:

$$\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial x_i} + \eta_z\left\langle \frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i} \right\rangle + H\eta_z\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} + {\eta_z}^2\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} = -\kappa\left({\eta_z}^2 - \eta_z\langle \eta_{fr} \rangle\right) \tag{35}$$

Usando que : $\eta_z\left\langle \frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(u_{ei}\eta_z\eta_e)}{\partial x_i} \right\rangle - \langle u_{ei}\eta_e \rangle \frac{\partial eta_z}{\partial x_i}$ se reescribe como:

$$\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial x_i} + \left\langle \frac{\partial(u_{ei}\eta_z\eta_e)}{\partial x_i} \right\rangle - \langle u_{ei}\eta_e \rangle \frac{\partial eta_z}{\partial x_i} + H\eta_z\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} + {\eta_z}^2\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} = -\kappa\left({\eta_z}^2 - \eta_z\langle \eta_{fr} \rangle\right) \tag{36}$$

Usando que : $H\eta_z\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} = H\frac{\partial(\eta_z u_{zi})}{\partial x_i} - Hu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}$ y que $\eta \ll H$ se reescribe como:

$$\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial t} + u_{zi}\frac{\partial({\eta_z}^2/2)}{\partial x_i} + \left\langle \frac{\partial(u_{ei}\eta_z\eta_e)}{\partial x_i} \right\rangle - \langle u_{ei}\eta_e \rangle \frac{\partial eta_z}{\partial x_i} + H\frac{\partial(\eta_z u_{zi})}{\partial x_i} - Hu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} = -\kappa\left({\eta_z}^2 - \eta_z\langle \eta_{fr} \rangle\right) \tag{37}$$

Para calcular la ecuación de la energía potencial de las perturbaciones se debe retener a partir de la *ecuación* 31 la parte puramente perturbada. Para ello, se debe calcular (31) − (32). Se obtiene:

$$\frac{\partial \eta_e}{\partial t}+H(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})+\eta_z(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})+\eta_e(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial y})+\eta_e(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})+u_z\frac{\partial \eta_e}{\partial x}+$$
$$+u_e\frac{\partial \eta_z}{\partial x}+u_e\frac{\partial \eta_e}{\partial x}+v_z\frac{\partial \eta_e}{\partial y}+v_e\frac{\partial \eta_z}{\partial y}+v_e\frac{\partial \eta_e}{\partial y}-\left\langle\frac{\partial(u_e\eta_e)}{\partial x}+\frac{\partial(v_e\eta_e)}{\partial y}\right\rangle=-\kappa\left(\eta_e-\eta_{fr}+\langle\eta_{fr}\rangle\right) \quad (38)$$

Luego se multiplica la ecuación anterior por η_e, obteniéndose:

$$\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial t}+H\eta_e(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})+\eta_z\eta_e(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})+{\eta_e}^2(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial y})+{\eta_e}^2(\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial v_e}{\partial y})$$
$$+u_z\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x}+u_e\eta_e\frac{\partial \eta_z}{\partial x}+u_e\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x}+v_z\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial y}+$$
$$+v_e\eta_e\frac{\partial \eta_z}{\partial y}+v_e\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial y}-\eta_e\left\langle\frac{\partial(u_e\eta_e)}{\partial x}+\frac{\partial(v_e\eta_e)}{\partial y}\right\rangle=-\kappa\left({\eta_e}^2-\eta_e\eta_{fr}+\eta_e\langle\eta_{fr}\rangle\right) \quad (39)$$

La ecuación anterior puede escribirse en notación de Einstein como:

$$\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial t}+u_{zi}\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}+u_{ei}\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}+u_{ei}\eta_e\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}+H\eta_e\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}+\eta_z\eta_e\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}+{\eta_e}^2\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i}+$$
$$+{\eta_e}^2\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}-\eta_e\left\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}\right\rangle=-\kappa\left({\eta_e}^2-\eta_e\eta_{fr}+\eta_e\langle\eta_{fr}\rangle\right) \quad (40)$$

Usando que $\eta_e\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}=\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}-u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial x_i}$ y asumiendo $\eta_z \ll H$, se simplifica como:

$$\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial t}+u_{zi}\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}+u_{ei}\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}+u_{ei}\eta_e\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}+Hpd(u_{ei}\eta_e)x_i-Hu_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial x_i}+$$
$$+{\eta_e}^2\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i}+{\eta_e}^2\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}-\eta_e\left\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}\right\rangle=-\kappa\left({\eta_e}^2-\eta_e\eta_{fr}+\eta_e\langle\eta_{fr}\rangle\right) \quad (41)$$

y al promediarla zonalmente se obtiene:

$$\langle\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial t}\rangle+u_{zi}\langle\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}\rangle+\langle u_{ei}\frac{\partial({\eta_e}^2/2)}{\partial x_i}\rangle+\langle u_{ei}\eta_e\rangle\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}+H\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}\rangle+$$
$$-H\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial x_i}\rangle+\langle{\eta_e}^2\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i}+\langle{\eta_e}^2\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}\rangle=-\kappa\left(\langle{\eta_e}^2\rangle-\langle\eta_e\eta_{fr}\rangle\right) \quad (42)$$

Multiplicando las *ecuaciones* 37 *y* 42 por ρg se obtiene:

Energía potencial del flujo medio:

$$\frac{\partial A_z}{\partial t}+u_{zi}\frac{\partial A_z}{\partial \times_i}+\rho g\left\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_z\eta_e)}{\partial x_i}\right\rangle-\rho g\langle u_{ei}\eta_e\rangle\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}+\rho gH\frac{\partial(\eta_z u_{zi})}{\partial x_i}-\rho gHu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i}=-\rho g\kappa\left({\eta_z}^2-\eta_z\langle\eta_{fr}\rangle\right) \quad (43)$$

Energía potencial media de las perturbaciones:

$$\langle\frac{\partial A_e}{\partial t}\rangle + u_{zi}\langle\frac{\partial A_e}{\partial x_i}\rangle + \langle u_{ei}\frac{\partial A_e}{\partial x_i}\rangle + \rho g\langle u_{ei}\eta_e\rangle\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} + \rho gH\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}\rangle - \rho gH\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial x_i}\rangle +$$
$$+\rho g\langle{\eta_e}^2\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} + \rho g\langle{\eta_e}^2\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}\rangle = -\rho g\kappa\left(\langle{\eta_e}^2\rangle - \langle\eta_e\eta_{fr}\rangle\right) \tag{44}$$

2.3. Términos de conversión de energía

Para esta práctica, la idea es concentrarse en la evolución de las distintas energías y en el rol de los términos de conversión. Las ecuaciones en su forma final son:

Energía cinética del flujo medio

$$\frac{\partial K_z}{\partial t}+u_{zi}\frac{\partial K_z}{\partial x_i}+\rho H\left\langle\frac{\partial(u_{zi}u_{ei}u_{ej})}{\partial x_j}\right\rangle-\rho Hu_{zi}\left\langle u_{ei}\frac{\partial u_{ej}}{\partial x_j}\right\rangle-\rho H\left\langle u_{ei}u_{ej}\right\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_j}+\rho gHu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} = -\rho H\kappa_v {u_{zi}}^2 \tag{45}$$

Energía cinética media de las perturbaciones

$$\left\langle\frac{\partial K_e}{\partial t}\right\rangle+u_{zi}\left\langle\frac{\partial K_e}{\partial x_i}\right\rangle+\left\langle u_{ei}\frac{\partial K_e}{\partial x_i}\right\rangle+\rho H\left\langle u_{ei}u_{ej}\right\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial xj}+\rho gH\left\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial xi}\right\rangle = -\rho H\kappa_v\left\langle{u_{ei}}^2\right\rangle \tag{46}$$

Energía potencial del flujo medio

$$\frac{\partial A_z}{\partial t}+u_{zi}\frac{\partial A_z}{\partial \times_i}+\rho g\left\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_z\eta_e)}{\partial x_i}\right\rangle-\rho g\left\langle u_{ei}\eta_e\right\rangle\frac{\partial eta_z}{\partial x_i}+\rho gH\frac{\partial(\eta_z u_{zi})}{\partial x_i}-\rho gHu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} = -\rho g\kappa\left({\eta_z}^2-\eta_z\left\langle\eta_{fr}\right\rangle\right) \tag{47}$$

Energía potencial media de las perturbaciones

$$\langle\frac{\partial A_e}{\partial t}\rangle + u_{zi}\langle\frac{\partial A_e}{\partial x_i}\rangle + \langle u_{ei}\frac{\partial A_e}{\partial x_i}\rangle + \rho g\langle u_{ei}\eta_e\rangle\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} + \rho gH\langle\frac{\partial(u_{ei}\eta_e)}{\partial x_i}\rangle - \rho gH\langle u_{ei}\frac{\partial \eta_e}{\partial x_i}\rangle +$$
$$+\rho g\langle{\eta_e}^2\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_i} + \rho g\langle{\eta_e}^2\frac{\partial u_{ei}}{\partial x_i}\rangle = -\rho g\kappa\left(\langle{\eta_e}^2\rangle - \langle\eta_e\eta_{fr}\rangle\right) \tag{48}$$

Estas ecuaciones fueron formuladas de manera que los términos de conversión de energía son fácilmente identificables:

Conversión $A_z \rightarrow K_z$

$$CZ = C(A_z, K_z) = -\rho gHu_{zi}\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} \tag{49}$$

Conversión $K_e \rightarrow K_z$

$$CK = C(K_e, K_z) = \rho H\left\langle u_{ei}u_{ej}\right\rangle\frac{\partial u_{zi}}{\partial x_j} \tag{50}$$

Conversión $A_z \rightarrow A_e$

$$CA = C(A_z, A_e) = -\rho g\langle u_{ei}\eta_e\rangle\frac{\partial \eta_z}{\partial x_i} \tag{51}$$

Conversión $A_e \rightarrow K_e$

$$CE = C(A_e, K_e) = -\rho g H \langle u_{ei} \frac{\partial \eta_e}{\partial x_i} \rangle \tag{52}$$

En general, todos los términos pueden ser fácilmente identificables con los que conforman el ciclo energético de Lorenz (James, p.135). El único término que merece una descripción especial es CE, ya que en realidad representa efectos que son despreciados en el ciclo de Lorenz antes mencionado.

Para entender mejor el significado físico de este término, nos basaremos en el análisis de Orlanski y Katzfey (1991). En este trabajo se muestra que un término del tipo $-\vec{V} \bullet \nabla\phi$ representa el efecto dominante en la evolución de la energía cinética de las perturbaciones. El trabajo muestra cómo este término se vincula con los flujos ageostróficos.

Si se considera el efecto integral de dicho término en toda la capa de fluido, puede escribirse como:$-\nabla \bullet (\vec{V}\phi)$, que coincide exactamente con: $-\nabla \bullet (\vec{V_a}\phi)$, donde $\vec{V_a}\phi$ es el flujo ageostrófico de geopotencial. Esto evidencia que las regiones de convergencia o divergencia de este flujo implican un intercambio entre energía potencial y cinética de las perturbaciones. Los autores muestran que estos flujos explican la transferencia de energía de un centro a otro.

En la expresión del término CE para el modelo de aguas poco profundas queda explícito que el mismo se relaciona con los flujos que atraviezan las isohipsas, es decir, con flujos ageostróficos.